Chapitre 8

Fonctions usuelles (partie 2)

Plan du chapitre

1 Complément sur les fonctions réciproques . . . **1**

1.1 Dérivée de f^{-1} . . . 1

1.2 Théorème de la bijection monotone . . . 2

2 Logarithme et exponentielle . . . **2**

2.1 Logarithme. . . . 2

2.2 Exponentielle . . . 4

2.3 Fonction $x \mapsto a^x$ . . . 5

3 Puissance. . . . **5**

3.1 Puissance entière . . . 6

3.2 Puissance rationnelle . . . 6

3.3 Puissance réelle . . . 8

4 Croissances comparées . . . **8**

5 Fonctions circulaires . . . **9**

6 Fonctions circulaires réciproques . . . **9**

6.1 Fonction arcsinus . . . 9

6.2 Fonction arccosinus . . . 11

6.3 Fonction arctangente . . . 13

7 Fonctions hyperboliques . . . **14**

7.1 Fonctions ch et sh . . . 14

7.2 Fonction th. . . . 15

8 Fonctions exponentielles complexes . . . **16**

1 Complément sur les fonctions réciproques

1.1 Dérivée de f^{-1}

Propriété 8.1 (Dérivée de la réciproque)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. f^{-1} est dérivable en $y \in J$ si et seulement si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Plus généralement, si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Démonstration. Admis pour le moment. □

On a vu que $f : E \to F$ est surjective ssi $F = f(E)$. Donc si $f : I \to J$ est bijective, alors nécessairement $J = f(I)$.

1.2 Théorème de la bijection monotone

Théorème 8.2 (Théorème de la bijection monotone)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement monotone (sur I). Alors :

- L'ensemble $J := f(I)$ est un intervalle.
- f est une bijection de I sur J.
- La fonction $f^{-1} : J \to I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f.

Démonstration. Admis pour le moment □

Remarque. Soit $x \in I$ et $y \in f(I)$. En remarquant que

$$(x,y) \in C_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff (y,x) \in C_{f^{-1}}$$

On en déduit que $C_{f^{-1}}$ se déduit de C_f par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2 Logarithme et exponentielle

2.1 Logarithme

Définition 8.3 (Logarithme népérien)

La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto x^{-1}$ qui s'annule en 1.

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

La justification de cette construction (notamment son unicité) sera précisée dans un chapitre ultérieur.

Propriété 8.4 (Propriétés de base)

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ (on précisera qui est e et pourquoi c'est vrai plus loin).
- ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

  ln est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété 8.5 (Propriétés algébriques de $\ln$**)**

Soit $a, b > 0$.

1. **Propriété fondamentale :** $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$
2. $$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$
3. pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$\ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration. Pour tout $a > 0$, on pose la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ b &\mapsto \ln(ab) - \ln b \end{aligned}$$

Alors φ est dérivable comme différence et composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout $b > 0$,

$$\varphi_a'(b) = a \times \frac{1}{ab} - \frac{1}{b} = 0$$

Ainsi, la fonction φ_a est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, $\varphi_a(b) = \varphi_a(1)$, donc

$$\ln(ab) - \ln b = \ln a - \ln 1 = \ln a$$

Finalement, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. □

Propriété 8.6 (Limites de $\ln$**)**

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Définition 8.7 (Logarithme de base a**)**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a, noté $\log_a$ l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_a(x) := \frac{\ln x}{\ln a}$$

En particulier, $\log_a(a) = 1$.

En physique, on emploie surtout le $\log_{10}$, tandis qu'en informatique c'est le $\log_2$.

2.2 Exponentielle

ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Définition 8.8 (Fonction exponentielle)

La fonction exponentielle, notée exp est la réciproque de la fonction ln.

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \exp(x) \end{aligned}$$

On notera $e^x := \exp(x)$.

Propriété 8.9 (Propriétés de base)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$,
$$y = e^x \iff x = \ln(y)$$
- $e^0 = 1$.
- $$\forall x > 0 \quad e^{\ln x} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln e^x = x$$
- exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\exp'(x) = \exp(x) > 0$$
exp est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 8.10 (Propriétés algébriques de exp)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. **Propriété fondamentale :** $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$
2. $$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \text{et} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$(e^x)^n = e^{nx}$$

Démonstration. En utilisant les propriétés de ln. □

Définition 8.11

On note $\underline{e := \exp(1)}$. Le réel e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper.
Ceci, couplé à la propriété fondamentale a conduit à notation $e^x := \exp(x)$.

Propriété 8.12 (Limites de exp)

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

2.3 Fonction $x \mapsto a^x$

Définition 8.13

Pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\boxed{a^x := e^{x\ln a}} > 0$$

Propriété 8.14

Soit $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

1. **Propriété fondamentale :** $\boxed{a^x a^y = a^{x+y}}$
2. $$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$
3. $$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$$
4. $$a^x b^x = (ab)^x$$

Démonstration. En utilisant la définition de a^x et les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. □

3 Puissance

On s'intéresse maintenant à la fonction $x \mapsto x^\alpha$ avec (dans le cas le plus général) $\alpha \in \mathbb{R}$. Selon la valeur de α, on a des définitions différentes.

3.1 Puissance entière

Définition 8.15 ($x \mapsto x^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction puissance n par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

Propriété 8.16

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors la fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

- Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- Si $n \in 2\mathbb{N}$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

Définition 8.17 ($x \mapsto x^{-n}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction inverse puissance n par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n} \end{aligned}$$

Propriété 8.18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors g est dérivable en tout $x \neq 0$ et

$$g'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

3.2 Puissance rationnelle

Définition 8.19 ($x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \in 2\mathbb{N}$, on définit la fonction racine n-ième par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

C'est la réciproque de $f|_{\mathbb{R}_+} : x \mapsto x^n$ (on a vu que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$).

- Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, on définit la fonction racine n-ième par

$$\begin{aligned} h : \boxed{\mathbb{R}} &\to \boxed{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

C'est la réciproque de $f : x \mapsto x^n$ qui est alors une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque. S'il est vrai que $\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \geq 0$, l'expression $\sqrt[3]{x}$ a un sens pour tout réel x !

On s'intéresse maintenant à la dérivée de la fonction h. On exclut d'emblée le cas $n = 1$ qui est évident.

Propriété 8.20

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Si $n \in 2\mathbb{N}$, la fonction $h : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$...
- Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, la fonction $h : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^*$...

$$h'(y) = \boxed{\frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}}$$

Démonstration.

- Supposons que $n \in 2\mathbb{N}+1$. Alors on veut dériver $h = f^{-1}$. On applique la propriété 8.1 : $h = f^{-1}$ est dérivable en tout $y \in D_h$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$.
  Or, $f'(x) = 0 \iff nx^{n-1} = 0 \iff x = 0$ car $n \geq 2$. Donc $h = f^{-1}$ est dérivable en tout y tel que $f^{-1}(y) \neq 0$, c'est-à-dire $h(y) \neq 0$, ou encore en tout $y \neq 0$. Finalement h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Le calcul de h' découle des règles de dérivation usuelles :
  $$h'(y) = \frac{1}{f'(h(y))} = \frac{1}{nh(y)^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{y^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$
- Pour le cas $n \in 2\mathbb{N}$, on a $h = \left(f|_{\mathbb{R}_+}\right)^{-1}$ mais le même calcul s'applique : h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et le calcul ci-dessus est encore valide.

□

Remarque. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on peut définir la fonction $F : x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ comme

$$F(x) = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

On a donc $F = f \circ h$ avec $f : x \mapsto x^p$ et $h : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$. Les ensembles de définitions et de dérivabilité de F sont à déterminer au cas par cas, selon la parité et le signe des entiers p et q .

3.3 Puissance réelle

Définition 8.21 ($x \mapsto x^\alpha$)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

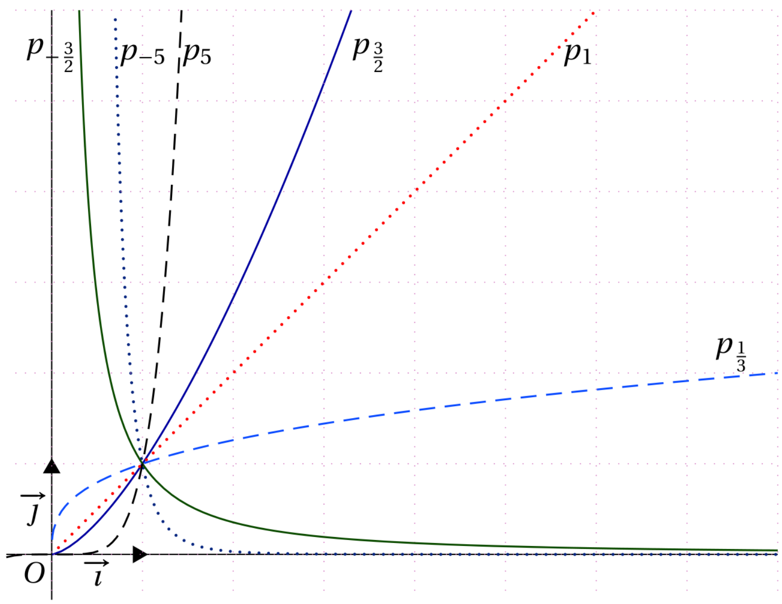
$$\begin{aligned} p_\alpha : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \boxed{x^\alpha := e^{\alpha \ln x}} \end{aligned}$$

Remarque. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, la fonction p_α coïncide (sur $\mathbb{R}_+^*$) avec les fonctions puissances vues précédemment.

Propriété 8.22 (Dérivée de f_α)

p_α est dérivable en tout $x \in]0, +\infty[$ et

$$p'_\alpha(x) = \frac{1}{x}\alpha e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$



4 Croissances comparées

Elles permettent de lever certaines formes indéterminées dans un calcul de limites.

Propriété 8.23 (Croissances comparées en $+\infty$)

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$$

En d'autres termes, en $+\infty$, toute puissance positive de exp l'emporte sur toute puissance positive de x qui elle-même l'emporte sur toute puissance positive de ln :

$$\text{"} \quad \exp \gg x^{\alpha} \gg \ln \quad \text{"}$$

Propriété 8.24 (Croissances comparées en $-\infty$ et 0)

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^{\beta} e^{\alpha x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |\ln x|^{\beta} x^{\alpha} = 0$$

5 Fonctions circulaires

Propriété 8.25

Les fonctions sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin'(x) = \cos x \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin x$$

Rappel : la fonction tangente est définie sur

$$D_{\tan} := \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)$$

Propriété 8.26

La fonction tan est continue et dérivable (sur son ensemble de définition $D_{\tan}$) et

$$\forall x \in D_{\tan} \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

En particulier, tan est strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

Comme tan est π-périodique, la fonction tan est strictement croissante sur chaque intervalle de $D_{\tan}$ mais pas sur $D_{\tan}$ tout entier (ou même une réunion de deux de ces intervalles).

6 Fonctions circulaires réciproques

6.1 Fonction arcsinus

La fonction sin est *continue* et *strictement croissante* sur *l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ sur l'intervalle $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) = [-1, 1]$.

Définition 8.27 (arcsinus)

La <u>fonction arcsinus</u> est la fonction réciproque de $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Elle est notée :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

Propriété 8.28 (Propriétés de $\arcsin$**)**

1. $\forall y \in [-1,1] \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$
2. $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
3. $\arcsin$ est impaire.
4. $\arcsin$ est strictement croissante.
5. $\arcsin$ est continue sur $[-1,1]$.

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Propriété 8.29 (Identités avec $\arcsin$**)**

1. $$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \arcsin(\sin(x)) = x$$
2. $$\forall y \in [-1,1] \qquad \sin(\arcsin(y)) = y$$
3. $$\forall y \in [-1,1] \qquad \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$$
4. $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$\forall y \in]-1,1[\qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Démonstration.

$\square$

Remarque. Les identités ci-dessus avec arcsin ne sont valides que sur des intervalles bien précis et tombent en défaut en dehors. Par exemple, pour $x = \pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$$

6.2 Fonction arccosinus

La fonction cos est *continue* et *strictement décroissante* sur *l'intervalle* $[0, \pi]$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction cos réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur l'intervalle $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Définition 8.30 (arccosinus)

La fonction arccosinus, notée arccos, est la fonction réciproque de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\to [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Propriété 8.31 (Propriétés de arccos)

1. $\forall y \in [-1,1] \qquad 0 \leq \arccos y \leq \pi$
2. $\arccos(-1) = \pi \qquad \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2} \qquad \arccos(1) = 0$
3. arccos n'est ni paire ni impaire.
4. arccos est strictement décroissante.
5. arccos est continue sur $[-1,1]$.

On notera que les deux dernières assertions découlent du théorème de la bijection monotone.

Propriété 8.32 (Identités avec arccos)

1. $$\forall x \in [0,\pi] \qquad \arccos(\cos x) = x$$
2. $$\forall y \in [-1,1] \qquad \cos(\arccos y) = y$$
3. $$\forall y \in [-1,1] \qquad \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$$
4. arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$\forall y \in]-1,1[\qquad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Démonstration. De même que pour arcsin, les deux premières assertions découlent du fait que arccos et $\cos|_{[0,\pi]}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
Pour la troisième assertion, on adapte la preuve précédente à arccos : le calcul montre que pour tout $y \in [-1,1]$,

$$|\sin(\arccos y)| = \sqrt{1-y^2}$$

Or, comme $\arccos y \in [0,\pi]$, on a $\sin(\arccos y) \geq 0$, d'où le résultat.
Pour la dernière assertion, on obtient de même que arccos est dérivable en tout $y \in]-1,1[$ et

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

Remarque. Les identités ci-dessus avec arccos ne sont valides que sur des intervalles bien précis et tombent en défaut en dehors. Par exemple pour $x = 2\pi \notin [0, \pi]$, on a

$$\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi$$

6.3 Fonction arctangente

La fonction tan est *continue* et *strictement croissante* sur *l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par le théorème de la bijection monotone, la fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

Définition 8.33 (arctangente)

La fonction arctangente, notée arctan, est la fonction réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

Propriété 8.34 (Propriétés de arctan**)**

1. $\forall y \in \mathbb{R} \qquad -\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$
2. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arctan(0) = 0 \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
3. arctan est impaire.
4. arctan est strictement croissante.
5. arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
6. On a une limite finie de arctan en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Propriété 8.35 (Identités avec arctan**)**

1. $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan(\tan(x)) = x$$
2. $$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \tan(\arctan(y)) = y$$
3. arctan est dérivable (sur $\mathbb{R}$) et
$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Démonstration. De même, les deux premières assertions découlent du fait que arctan et $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
La troisième assertion se démontre avec la propriété 8.1. Soit $y \in \mathbb{R}$. arctan est dérivable en y si et seulement si $\tan'(\arctan y) \neq 0$ càd
$$0 \neq 1 + \tan^2(\arctan y) = 1 + y^2$$
On voit que tout $y \in \mathbb{R}$ vérifie cette assertion. Ainsi arctan est dérivable en y et
$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$
□

7 Fonctions hyperboliques

7.1 Fonctions ch et sh

Définition 8.36

On définit :

- la fonction cosinus hyperbolique, notée ch :
$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$
- la fonction sinus hyperbolique, notée sh :
$$\begin{aligned} \mathrm{sh} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Propriété 8.37 (Relation fondamentale)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Propriété 8.38 (Parité, signe)

1. $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$.
3. ch est paire et sh est impaire.
4. sh et ch sont continues et dérivables (sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$$
En particulier, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

7.2 Fonction th

Définition 8.39 (Tangente hyperbolique)

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th :
$$\begin{aligned} \mathrm{th} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \end{aligned}$$

Propriété 8.40 (Propriétés)

1. $\mathrm{th}(0) = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \mathrm{th} x < 1$
3. th est impaire.
4. th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$
En particulier, th est strictement croissante.
5. $$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$$

8 Fonctions exponentielles complexes

Propriété 8.41

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

La fonction
$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\varphi(t)} \end{array}$$
est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction
$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \varphi'(t)e^{\varphi(t)} \end{array}$$

En pratique, le calcul et donc similaire aux exponentielles réelles : il suffit de dériver la fonction dans l'exponentielle (en considérant i comme une constante).

Exemple 1. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{x+ix^2}$.

Exemple 2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $t \mapsto e^{i\omega t}$.